



## LIGA MATEMATYCZNO - FIZYCZNA

### ZADANIA NA III ETAP

#### DLA KLAS III

- Wykazać, że jeżeli w trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta przy podstawie jest prostopadła do ramion, to ten trójkąt jest równoboczny.
- Rozwiąż równania
  - $2^{x+3}=4^{x+1}$
  - $4^{x+7}=8^{2x-5}$
  - $2^{2x-4}=4^{3-3x}$
  - $4^{3x-1}=32^{5-2x}$
- Rozwiąż równania
  - $2^{x-3} \cdot 10^{x-3} = 5^{3x+7} \cdot 4^{3x+7}$
  - $3 \cdot 5^{x+1} - 2 \cdot 5^x = 5^{x+2} - 12 \cdot 5^{-1}$
- Dla jakiego argumentu wartość funkcji  $y=3x-1$  i  $y=2x+3$  są równe?
- Wyznacz ostatnią cyfrę liczby  $1772^{1918}$ .
- Ile trzeba zużyć octu o stężeniu 5%, aby otrzymać 2 litry octu o stężeniu 3,5%?
- Wiemy, że 12 robotników może wykonać pewną pracę w ciągu 25 dni. Po 5 dniach liczbę robotników zwiększono i pracę wykonano w cztery dni przed terminem. ilu robotników przystąpiło dodatkowo do pracy?
- Odległość między miastami A i B leżącymi na brzegu rzeki wynosi 30 km. Wioślarz przepłynął z A do B i z powrotem w ciągu 10 godzin. Oblicz prędkość prądu rzeki, jeżeli wiadomo, że na przepłynięcie 2 km pod prąd wioślarz zużywa tyle czasu co na 3 km z prądem.
- Odległość między przystanią A i przystanią B statek przepływa z prądem rzeki w ciągu 5 godzin. Na przepłynięcie drogi powrotnej zużywa 7 godzin. Ile godzin płynie woda od przystani A do przystani B?
- Pewien stop zawiera miedź i cynk w stosunku 1:2, drugi w stosunku 2:3. Ile kg pierwszego i ile drugiego stopu należy zmieszać, aby otrzymać 44 kg stopu, w którym stosunek miedzi do cynku wynosi 17:27?
- Udowodnij, że pole koła zbudowanego na kwadracie jest dwukrotnie większe od pola koła wpisanego w ten kwadrat.
- W kulę o promieniu 10 cm wpisano sześcian, a w ten sześcian znowu kulę. Wyznacz stosunek objętości tych trzech brył.
- Jeżeli liczbę dwucyfrową podzielimy przez różnicę jej cyfr dziesiątek i jedności, to otrzymamy 11 i resztę 5. Jeżeli zaś tę samą liczbę podzielimy przez sumę jej cyfr, to otrzymamy 8 i resztę 7. Wyznacz tę liczbę.
- Znajdź taką liczbę dwucyfrową, aby suma jej cyfr wynosiła 9 i aby po przestawieniu cyfr otrzymać liczbę mniejszą od połowy szukanej liczby. Podaj wszystkie takie liczby.

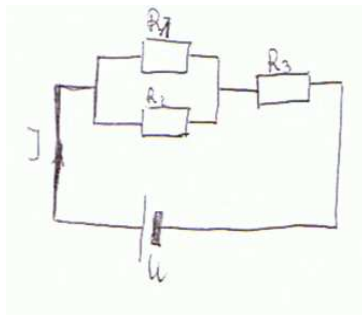
15. Mydło kulistego kształtu zużyte zostało tak, że powstała kula o promieniu trzykrotnie mniejszym od początkowego. Jaką część mydła zużyto?
16. Dana jest funkcja określona wzorem:  $f(x) = (-x+2)^2 - (2x-1)^2$ .
- napisz wzór w prostszej postaci;
  - narysuj wykres funkcji;
  - dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości ujemne?
17. Rozłóż na czynniki, a następnie oblicz wartość liczbową:  
 $2x^2 + 4xy + 2y^2$  dla  $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$  i  $y = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ .
18. Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia rozwiąż równanie:  $x^2 - 6x + 5 = 0$ .
19. Boki czworokąta niewypukłego są parami równe. Dwa kąty tego czworokąta mają miary równe  $60^\circ$  i  $270^\circ$ . Krótszy bok ma długość 2 cm. Oblicz pole tego czworokąta.
20. Naszkicuj wykres funkcji, która dla argumentów ujemnych dana jest wzorem  $y = x+2$ , a dla argumentów dodatnich  $y = -x+2$ .
- Ile wynosi wartość funkcji dla  $x = -1$ , a ile dla  $x = 3$ ?
  - Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość  $-1$ .
21. Liczba 2 jest miejscem zerowym funkcji  $y = 3x + b$ .
- Podaj wzór tej funkcji.
  - Sporządź jej wykres.
  - Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości nieujemne?
  - Oblicz pole trójkąta ograniczonego wykresem funkcji i osiami układu współrzędnych.
22. Dana jest funkcja, która każdej liczbie naturalnej  $n$  przyporządkowuje resztę z dzielenia tej liczby przez 4. Podaj zbiór wartości tej funkcji. Wykonaj wykres dla  $n$  mniejszego od 15.
23. Znajdź dwie takie liczby, aby ich suma wynosiła 13, a różnica kwadratów 65.
24. Rozwiąż graficznie i algebraicznie układ równań:  $y = 12x + 3$  i  $y = x + 4$ .
25. Rozwiąż równanie  $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 2x = (\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ .
26. Rozwiąż równanie  $\sqrt{(x-4)^2} + 2x = 5$
27. Udowodnij, że środkowe trójkąta dzielą trójkąt na 6 części o równych polach.
28. Obwód równoległoboku wynosi 36, a jego pole 60. Jedna z wysokości ma długość 6. Oblicz długości boków tego równoległoboku.
29. Krótsza przekątna równoległoboku, o długości  $2\sqrt{5}$  cm tworzy z krótszym bokiem równoległoboku kąt prosty. Stosunek długości boków równoległoboku wynosi 2:3. Oblicz obwód figury.
30. Kąt rozwarcia stożka wynosi  $60^\circ$ , a suma promienia podstawy i tworzącej wynosi 42. Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.
31. Kula o promieniu 10 cm i stożek o promieniu podstawy 20 cm mają równe objętości. Oblicz wysokość stożka.
32. Objętość walca równa się  $18\pi \text{ cm}^3$ . Wysokość walca jest 3 razy dłuższa od promienia podstawy. Oblicz pole powierzchni całkowitej walca.
33. Arkusz tektury ma 72 cm długości i 60 cm szerokości. W każdym jego rogu wycięto kwadrat o boku 8 cm. Przez zagięcie czterech prostokątów powstałych na bokach otrzymano otwarte pudełko. Oblicz jego objętość.

34. Podstawą graniastoslupa jest równoległobok o bokach długości 4 cm i 6 cm oraz kącie  $\alpha=30^0$ . Oblicz objętość graniastoslupa wiedząc, że jego pole powierzchni całkowitej wynosi  $72 \text{ cm}^2$ .
35. Wał ochronny ma przekrój w kształcie trapezu równoramiennego, przy czym górna szerokość wału wynosi 5 m, natomiast boczne nasypy o długości 6 m są nachylone do poziomu pod kątem  $60^0$ . Oblicz dolną szerokość wału. Ile metrów sześciennych ziemi potrzeba do usypania takiego wału o długości 1 km.
36. Długość promienia podstawy stożka stanowi 60% długości jego tworzącej. Pole powierzchni bocznej tego stożka wynosi  $270\pi \text{ cm}^2$ . Oblicz objętość stożka.
37. Pole powierzchni całkowitej stożka o promieniu długości 20 cm wynosi  $1200\pi \text{ cm}^2$ . Znajdź miarę kąta nachylenia tworzącej stożka do podstawy.
38. Punkty  $A=(0,0)$  i  $B=(3,1)$  są wierzchołkami rombu ABCD, którego jedną z osi symetrii jest os OX. Oblicz długość obwodu i pole tego rombu.
39. Krótsza przekątna równoległoboku o długości 8 cm tworzy z krótszym bokiem tego równoległoboku kąt prosty. Stosunek długości boków równoległoboku wynosi 5:3. Oblicz pole i obwód równoległoboku.
40. Dane SA dwa okręgi o wspólnym środku. Cięciwa większego okręgu styczna do mniejszego ma długość 10 cm. Oblicz pole pierścienia kołowego wyznaczonego przez te okręgi.

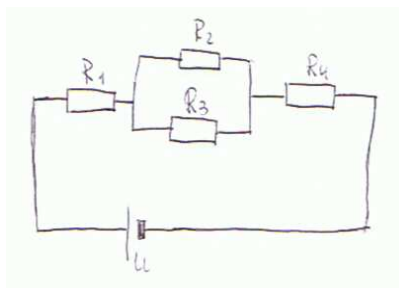
### Zadania z fizyki klasy III

1) Mamy dany obwód jak na rysunku zasilony ze źródła o napięciu  $U=20\text{V}$  Wszystkie oporniki w nim zawarte mają taką samą wartość rezystancji wynoszącą  $10\Omega$ .

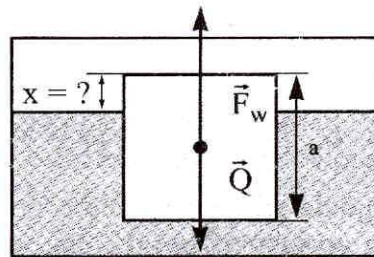
- Oblicz opór zastępczy całego obwodu.
- Natężenie prądu płynącego w obwodzie i przez poszczególne oporniki.
- Napięcia na poszczególnych opornikach.



2) Mamy dany obwód jak na rysunku zasilony ze źródła o napięciu 200V. Każdy z oporników ma rezystancję  $100\Omega$ . Oblicz moc jaka wydzieli się w obwodzie. Podaj opór zastępczy obwodu.



3) W wodzie pływa drewniany sześcian o krawędzi 10 cm. Jaka wysokość sześcianu wystaje nad powierzchnię wody, jeżeli powierzchnie jego ścian bocznych są prostopadłe do powierzchni wody? Gęstość wody  $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ , gęstość drewna  $\rho_d = 800 \text{ kg/m}^3$ .



4) Pociąg towarowy o masie 5000 t, jadący z prędkością 72 km/h zahamowano za pomocą hamulców. O ile wzrosła energia wewnętrzna hamulców i kół wagonów, o które tarły te hamulce?

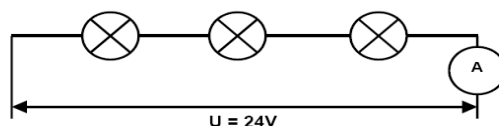
5) Głodny gepard zobaczył królika w odległości 200 m od siebie i został jednocześnie dostrzeżony przez swoją ofiarę. Królik rzucił się do ucieczki a gepard w pościg za nim. Zakładając, że królik porusza się ruchem jednostajnym z prędkością 40 km/h, a gepard również ruchem jednostajnym z prędkością 80 km/h, odpowiedz na pytanie jak długo będzie trwał pościg za królikiem przy założeniu, że ich ruch się nie zmienia.

6) Przez grzałkę o rezystancji  $R=40 \Omega$  przepuszczono prąd o natężeniu  $I=4 \text{ A}$ . Oblicz jaką moc ma grzałka i jak długo będzie trwało doprowadzenie do wrzenia 1 kg wody o temperaturze  $20^\circ\text{C}$ , jeśli 100 % energii elektrycznej zamienia się w ciepło i nie występują straty ciepła do otoczenia. Ciepło właściwe wody wynosi  $4200 \text{ J/(kg}^\circ\text{C)}$ .

7) Jak wysoko doleci pocisk wystrzelony z prędkością początkową 300 m/s jeśli założymy brak oporów ruchu. Przyspieszenie ziemskie przyjmując  $g=10 \text{ m/s}^2$ .

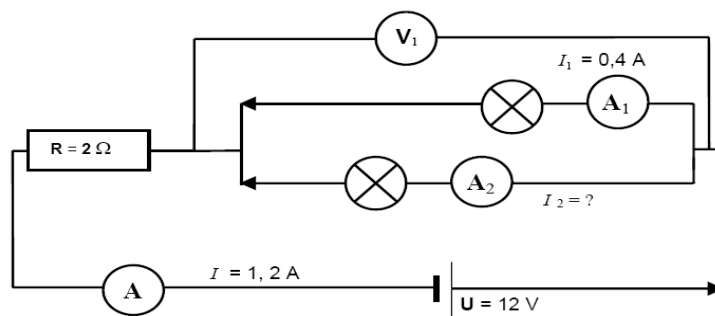
8) Żelazo ma kształt sześcianu o boku  $a = 2 \text{ dm}$ . Dla potrzeb użytkowych wycięto z niego mniejszy sześcian o boku  $a_1 = 1 \text{ dm}$  i odłożono do dalszej obróbki. Pozostałą jednolitą część żelaza o zdeformowanym kształcie zanurzone całkowicie w wodzie. Wiedząc, że gęstość wody  $1 \text{ g/cm}^3$  i przyjmując wartość przyspieszenia ziemskiego  $g = 10 \text{ m/s}^2$  można obliczyć, że na zanurzone żelazo działa siła wyporu o wartości .....

9) Trzy jednakowe żarówki i amperomierz włączono szeregowo do źródła prądu o napięciu  $U = 24\text{V}$  (rysunek). Amperomierz wskazywał natężenie prądu  $I = 0,5 \text{ A}$ . Oblicz napięcia i moc wydzieloną na każdej z żarówek.

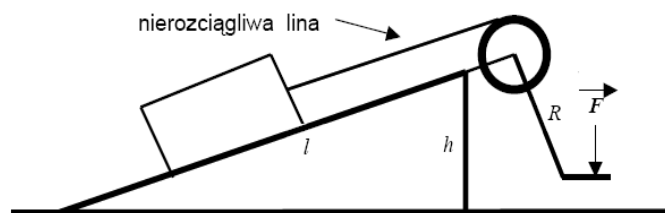


10) W górach kamień ruszony z miejsca spada w przepaść z wysokości 100 m. Z jaką szybkością uderzy w skaliste podłoże, jeżeli 20% jego energii potencjalnej zostanie zużyte na pokonanie oporów powietrza?

11) Obok schematu obwodu (patrz rysunek), wypisano wartości napięcia źródła prądu  $U$ , oporu  $R$  i wartości natężeń prądów jakie wskazują amperomierze  $A$  i  $A_1$ . Obliczyć, że wartości napięcia  $U_1$  i natężenia  $I_2$  jakie wskazują przyrządy oraz opór całkowity  $R_z$  układu dwu żarówek wynoszą odpowiednio:



12) Za pomocą kołowrotu o średnicy wału  $d = 1\text{ dm}$  i promieniu korby  $R = 3\text{ dm}$  wciągano po równi pochyłej ruchem jednostajnym, umieszczone w skrzyni pianino o masie  $m = 120\text{ kg}$ . Jaka powinna być co najmniej wartość siły przykładanej do rączki kołowrotu (patrz rys.), jeżeli równia ma wymiary: długość  $l = 4\text{ m}$ , wysokość  $h = 1\text{ m}$ ? Masę liny, tarcie podczas ruchu posuwistego i obrotu kołowrotu



pominąć, a przyspieszenie ziemskie przyjmując  $g = 10\text{ m/s}^2$ .

13) Na wózek o masie  $M = 3\text{ kg}$  poruszający się po poziomym torze ze stałą szybkością  $v_0 = 36\text{ km/h}$  położono plecak o masie  $m = 1\text{ kg}$ . Ile ciepła wydzieli się po dokonaniu tej czynności? Opory ruchu zaniedbać.

14) Mamy 3 oporniki  $R_1 = 200\ \Omega$ ,  $R_2 = 300\ \Omega$  i  $R_3 = 500\ \Omega$  połączone równolegle do źródła o napięciu  $12\text{ V}$ . Narysuj schemat obwodu. Oblicz opór zastępczy obwodu, napięcia na poszczególnych opornikach, natężenie prądu płynącego w obwodzie i przez poszczególne oporniki, moc prądu jaka wydzieli się na tych opornikach i w obwodzie.

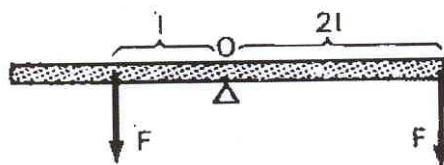
15) Mamy 3 oporniki  $R_1=200\ \Omega$ ,  $R_2=300\ \Omega$  i  $R_3=500\ \Omega$  połączone szeregowo do źródła o napięciu 12 V. Narysuj schemat obwodu. Oblicz opór zastępczy obwodu, napięcia na poszczególnych opornikach, natężenie prądu płynącego w obwodzie i przez poszczególne oporniki, moc prądu jaka wydzieli się na tych opornikach i w obwodzie.

16) Jak długo trzeba przepuszczać prąd przez grzałkę o mocy 1000W aby doprowadzić do wrzenia 10 kg wody o temperaturze początkowej  $20^\circ\text{C}$  umieszczonej w osłonie termicznej jeśli sprawność grzałki wynosi 80%. Ciepło właściwe wody przyjmij  $4200\ \text{J}/(\text{kg}^\circ\text{C})$

17) Pięciokilogramowa ryba płynie z prędkością 1 m/s. Spotyka bezmyślną rybę o masie 1kg, płynącą naprzeciw z pewną prędkością. Po jej połknięciu prędkość dużej ryby natychmiast zmalała do zera. Jaka była prędkość małej ryby przed jej skonsumowaniem?

18) Żelazna kula o masie 10 kg spada na chodnik z wysokości 100 m. Połowa jej energii zużyta zostaje na jej ogrzanie. O ile wzrośnie, w przybliżeniu, temperatura kuli. Ciepło właściwe żelaza wynosi około  $450\ \text{J}/\text{kg}^\circ\text{C}$ .

19) Do dźwigni przyłożono siłę  $F=200\ \text{N}$  w sposób pokazany na rysunku. Oblicz moment siły działającej na dźwignię jeśli  $l=0,5\ \text{m}$ . Jak zachowa się tak obciążona dźwignia.



20) Powierzchnie tłoków prasy hydraulicznej wynoszą odpowiednio  $1\ \text{m}^2$  i  $20\ \text{cm}^2$ . Jaką siłą trzeba podziałać na mniejszy tłok, aby podnieść blok o masie 4 ton umieszczony na większym tłoku?